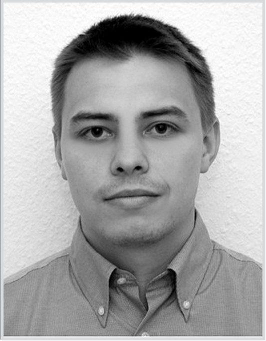

УДК 336.76

Т. Д. Боднар
доктор наук габілітований (статистика та економетрика),
кандидат фізико-математичних наук,
науковий співробітник факультету математики,
Берлінський університет імені Гумбольдта,
Німеччина, bodnar@math.hu-berlin.de

Т. М . Заболоцький
кандидат економічних наук, старший викладач
кафедри комп'ютерних технологій,
Львівський інститут банківської справи
Університету банківської справи
Національного банку України, Україна
zjabka@yahoo.com

МАКСИМІЗАЦІЯ ВІДНОШЕННЯ ШАРПА ПОРТФЕЛЯ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ У КОНТЕКСТІ МІНІМІЗАЦІЇ РИЗИКУ

Анотація. *У роботі досліджено питання вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі максимізації відношення Шарпа портфеля та використання принципу мінімізації Value-at-Risk портфеля. Визначено рівень довіри для Value-at-Risk портфеля, за якого структури портфелів із максимальним відношенням Шарпа і найменшим рівнем Value-at-Risk співпадають. Базуючись на історичних даних п'яти щомісячних MSCI курсів, показано, що вибіркова оцінка цього рівня довіри є доволі точною навіть за невеликого обсягу вибірки (n=60) і досить швидко наближається до правильного значення в разі збільшення обсягу вибірки. На основі отриманих результатів дослідження авторами зроблено висновок, що завдання максимізації відношення Шарпа на практиці можна замінити більш універсальним завданням мінімізації Value-at-Risk.*
Ключові слова: *фінансові активи, структура портфеля, відношення Шарпа, Value-at-Risk, дисперсія, ризик.*

Т. Д. Боднар
доктор наук габилитированый (статистика и эконометрика), кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник факультета математики, Берлинский университет им. Гумбольдта, Германия
Т. Н. Заболоцкий
кандидат экономических наук, старший преподаватель кафедры компьютерных технологий,
Львовский институт банковского дела Университета банковского дела Национального банка Украины, Украина

МАКСИМИЗАЦИЯ ОТНОШЕНИЯ ШАРПА ПОРТФЕЛЯ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ В КОНТЕКСТЕ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА

Аннотация. В работе исследован вопрос выбора рациональной структуры портфеля финансовых активов на основе максимизации отношения Шарпа портфеля и использования принципа минимизации Value-at-Risk портфеля. Определен уровень доверия для Value-at-Risk портфеля, при котором структуры портфелей с максимальным отношением Шарпа и наименьшим уровнем Value-at-Risk совпадают. Основываясь на исторических данных пяти ежемесячных MSCI курсов, показано, что выборочная оценка этого уровня доверия достаточно точна даже при небольшом объеме выборки (n=60) и довольно быстро приближается к правильному значению при увеличении объема выборки. Полученные результаты исследования позволили авторам сделать вывод, что задачу максимизации отношения Шарпа на практике можно заменить более универсальной задачей минимизации Value-at-Risk.
Ключевые слова: финансовые активы, структура портфеля, отношение Шарпа, Value-at-Risk, дисперсия, риск.

Taras Bodnar
Dr. Hab. in Statistics and Econometrics, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Humboldt University of Berlin, Germany
6 Unter den Linden, Berlin, 10099, Germany
Taras Zabolotskyy
PhD in Economics, Lviv Banking Institute of University of Banking of the National Bank of Ukraine, Ukraine
9 T. Shevchenko Ave, Lviv, 79005, Ukraine

MAXIMIZATION OF THE SHARPE RATIO OF AN ASSET PORTFOLIO IN THE CONTEXT OF RISK MINIMIZATION

Abstract. The authors investigate the problem of optimal portfolio selection based on the Sharpe ratio of portfolio maximizing by usage the principle of Value-at-Risk minimization. We derive the confidence level for the Value-at-Risk under which the portfolio with the maximum Sharpe ratio coincides with the portfolio that minimizes the Value-at-Risk. Using historical data of five monthly MSCI indices, it is shown that the sample estimator of this confidence level is very accurate even for a small sample size (n=60), and it sufficiently quickly converges to the true value as the sample size increases. Finally, we prove that the problem of the Sharpe ratio maximizing in practice can be replaced by more universal one, which is the Value-at-Risk minimizing.
Keywords: portfolio selection problem; Sharpe ratio; Value-at-Risk; variance; sample estimator; risk measure.
JEL Classification: G11, G17, C13

Постановка проблеми. Класична теорія портфеля була розроблена Г. Марковіцем (Markowitz, 1952) [1]. Її сутність полягає в пошуку раціонального розподілу коштів між фінансовими активами з метою отримання певного рівня прибутку за найменшого ризику. Тож основним завданням у процесі побудови портфеля є оцінка його ризику. При цьому актуалізується питання вибору величини, яка б дозволила якомога точніше виміряти ризик.

У класичній теорії для описання ризику використовують дисперсію. І хоч такий вибір мало узгоджується із практичним розумінням ризику, класична теорія портфеля завдяки своїй простоті зайняла важливе місце як у фінансовій науці, так і у практиці фінансової діяльності. Згодом з'явилося поняття портфеля із найменшим ризиком, коли дисперсія портфеля мінімізується без накладання додаткових умов на очікуваний дохід, та поняття ефективної множини. Поняття ефективної множини було аналітично описано Р. Мертоном (Merton, 1972) [2].

Зазначимо, що раціонально задати рівень дохідності портфеля доволі непросто, особливо коли діють додаткові умови. До того ж при виборі раціональної структури портфеля необхідно певним чиномураховувати співвідношення між очікуваним доходом та ризиком. Усе це призвело до вироблення інших критеріїв вибору структури портфеля.

Вибір раціональної структури портфеля зазвичай здійснюється за критеріями максимізації очікуваної корисності портфеля [3]. Корисність у цьому випадку визначається за допомогою спеціального коефіцієнта, який описує ставлення інвестора до ризику.

При побудові інвестиційного портфеля одним із найпопулярніших критеріїв вибору раціональної структури є максимізація відношення Шарпа [4; 5]. Відомо, що портфель із максимальним відношенням Шарпа належить до ефективної множини. Вадою цього методу є проблема вибору міри ризику. Як і в класичному означенні, за ризик тут приймається дисперсія портфеля.

У кінці минулого століття дисперсія як міра ризику зазнала нищівної критики. Тому для його обчислення було запропоновано квантильну міру Value-at-Risk (надалі *VaR*) [6], яка нині є найпоширенішим інструментом оцінки ризику. Додатковим параметром квантильної міри є рівень довіри, який класично прийнято позначати α.

Зважаючи на популярність двох попередньо описаних методів, виникає питання про їх еквівалентність.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню проблеми вибору структури портфеля фінансових активів та дослідженню його властивостей присвячено ряд праць українських – В. В. Вітлінський, А. Б. Камінський, а також зарубіжних – Т. Болерслев (Bollerslev, 2011), Г. Пфлюг (Pflug, 2000), С. Урясев (Uryasev, 2000, 2002), Р. Рокафелар (Rockafellar, 2000, 2002), Г. Александер (Alexander, 2002, 2004), А. Баптіста (Baptista, 2002, 2004) – учених.

Уперше до питання вибору раціональної структури портфеля із найменшим рівнем *VaR* звернулися Г. Александер і М. Баптіста (Alexander & Baptista, 2002) [7], які показали, що такий портфель належить ефективній множині задачі Марковіца. Змінюючи значення рівня довіри α від 1 до найменшого, за якого задача мінімізації має сенс (див., напр., [7]), можна отримати ефективну множину задачі Марковіца. Отже, результат мінімізації ризику портфеля залежить від вибору міри ризику. Однак при переході від дисперсії до *VaR* деякі портфелі втрачають свою ефективність. Цей недолік не притаманний відношенню Шарпа. Портфель, побудований на основі максимізації відношення Шарпа, завжди буде ефективним, якщо мірою ризику буде *VaR*, тобто він належатиме відповідній ефективній множині. Отже, повинен існувати такий рівень довіри α_{SR}, за якого портфель із максимальним відношенням Шарпа співпадатиме із портфелем, що має найменший рівень *VaR* за рівня довіри α_{SR}.

Мета статті полягає в дослідженні можливості переходу від задачі максимізації відношення Шарпа портфеля до задачі мінімізації *VaR* портфеля, знаходженні рівня довіри α_{SR}, за якого ці дві задачі будуть еквівалентними, визначенні ймовірнісних характеристик вибіркової оцінки α_{SR}.

Основні результати дослідження. Основною характеристикою фінансового активу є його ціна. Проте у працях із фінансової математики частіше використовуються похідні характеристики ціни, оскільки вони більш статистично привабливі. Найвідомішою серед них є неперервна дохідність. Якщо ціну фінансового активу в момент часу *t* позначити як P_t, то дохідність активу X_t на цей період можна обчислити за формулою:

$$X_t = 100 \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Припустімо, що кількість фінансових активів, із яких ми формуємо портфель, становить *k*. Об'єднаємо дохідності активів, із яких буде сформовано наш портфель в момент часу *t*, у вектор та позначимо його $\mathbf{X_t}=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$. У загальному випадку нас не цікавить абсолютна величина коштів, вкладених у фінансовий актив, а лише відносне (відносно загальної кількості коштів) значення. Позначимо як w_i частку і-го фінансового активу в портфелі, а вектор $w=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$ назвемо портфелем фінансових активів.

У фінансовій літературі припускається, що поведінка дохідності фінансового активу має випадкову природу, тобто дохідність поводиться як випадкова величина. Зауважимо, що таке припущення узгоджене із практичними дослідженнями і часто використовується в наукових роботах. Припустімо, що X_t є *k*-вимірною нормально розподіленою випадковою величиною із параметрами μ та Σ. Тоді очікувану дохідність портфеля можемо обчислити як $R_w = \mathrm{E}(X_{wt}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$, а дисперсію $V_w = D(X_{wt}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$, де X_{wt} – дохідність портфеля в момент часу *t*. Зрозуміло, що припущення про нормальність поведінки дохідностей не відображає цілковито природу цієї поведінки, а тому зазнає критики в останні десятиліття. Водночас, воно доволі часто використовується у фінансовій літературі загалом та в роботах, присвячених сучасній теорії портфеля, зокрема. Крім того, як зазначено в роботі [8], у разі оптимальної диверсифікації портфеля зростання імовірності настання екстремальних подій, відносно нормального розподілу, не має істотного впливу на зміну характеристик портфеля.

Перед формуванням портфеля, тобто перед розподілом коштів між активами, необхідно вибрати певний критерій, який, з одного боку, відображатиме очікування від портфеля, а з другого – задасть метод побудови портфеля. У загальному випадку класичною задачею при формуванні портфеля є досягнення якомога більшої очікуваної дохідності за якомога меншого ризику. Формально, прийнявши за ризик портфеля його дисперсію (за Марковіцем), оптимізаційну задачу можемо записати у вигляді:

$$\begin{cases} R_w \to \max \\ V_w \to \min \end{cases} \text{за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Умова $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$ вказує на те, що всі кошти повинні бути розподілені між активами. Зауважимо, що сформована таким чином задача не має розв'язку в загальному випадку. Спочатку необхідно звести її до задачі одновимірної оптимізації. Г. Марковіц (Markowitz, 1952) [1] для вирішення цієї проблеми запропонував обмежити знизу бажаний рівень очікуваної дохідності портфеля та мінімізувати його ризик або, що еквівалентно, обмежити ризик портфеля зверху і максимізувати його очікувану дохідність. За такого підходу оптимізується лише одна із характеристик портфеля. В. Шарпом (Sharpe, 1994) [4] для досягнення оптимізації портфеля запропоновано використати відношення очікуваної дохідності портфеля до його ризику. І чим більшим є таке відношення, тим кращим буде портфель. Приймаючи за міру ризику портфеля його дисперсію, оптимізаційна проблема Шарпа матиме вигляд:

$$R_w / \sqrt{V_w} \to \max \text{за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \quad (1)$$

Як відзначалося вище, дисперсії як мірі ризику притаманні численні недоліки. З огляду на це у практичній діяльності фінансових установ великої популярності набули квантильні міри ризику, до яких належить *VaR*. Формально *VaR* за рівня довіри α можна визначити як рівень дохідності X_{wt}:

$$P\{X_{\mathbf{w}t} < -VaR_\alpha\} = 1 - \alpha.$$

Отже, *VaR* за рівня довіри α характеризує мінімальний рівень втрат з імовірністю ($1-\alpha$). Завдяки простоті обчислення та інформативності така міра пропонується для оцінки ризику основними рекомендаційними програмами у сфері банківської діяльності, зокрема *Basel II, RiskMetrics, CAD II* (див., напр., [6]). Застосування *VaR* для оцінки ризику портфеля фінансових активів описано в роботах [8; 9].

Зважаючи на це, виникає питання щодо обчислення відношення Шарпа із використанням *VaR* як міри ризику, а також як критерію при виборі раціональної структури портфеля.

Позначимо *VaR* портфеля **w** за рівня довіри α як $M_w(\alpha)$. У разі нормальності дохідностей активів, із яких складено портфель, *VaR* портфеля **w** можна визначити за формулою $M_{\mathbf{w}}(\alpha) = z_\alpha \sqrt{V_{\mathbf{w}}} - R_{\mathbf{w}}$, де $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$, що є α-квантилю стандартного нормального розподілу. З означення відношення Шарпа маємо, що перехід від використання дисперсії до *VaR* при обчисленні ризику призведе до зміни значення цього відношення і набуде вигляду $R_{\mathbf{w}} / \left(z_\alpha \sqrt{V_{\mathbf{w}}} - R_{\mathbf{w}}\right)$.

Цікавим є також питання зміни раціональної структури портфеля фінансових активів при переході від оптимізаційної задачі вибору структури (1) до наступної задачі:

$$R_{\mathbf{w}} / \left(z_\alpha \sqrt{V_{\mathbf{w}}} - R_{\mathbf{w}}\right) \to \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \quad (2)$$

Неважко показати, що оптимізаційні задачі (1) та (2) є еквівалентними, а отже, структура портфеля активів залишиться незмінною при переході від (1) до (2).

Твердження 1. Припустимо, що $z_\alpha \sqrt{V_{\mathbf{w}}} - R_{\mathbf{w}} > 0$. Тоді оптимізаційні задачі (1) і (2) є еквівалентними.

Доведення. Задача (2) є еквівалентна задачі

$$\left(z_\alpha \sqrt{V_{\mathbf{w}}} - R_{\mathbf{w}}\right) / R_{\mathbf{w}} \to \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1,$$

яка, своєю чергою, може бути записана у вигляді:

$$\left(z_\alpha \sqrt{V_{\mathbf{w}}}\right) / R_{\mathbf{w}} - 1 \to \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Використовуючи прості арифметичні операції, отримаємо, що попередня задача є еквівалентною задачі

$$R_{\mathbf{w}} / \sqrt{V_{\mathbf{w}}} \to \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1,$$

що і потрібно було довести.

Результатом твердження 1 є те, що при переході від дисперсії як міри ризику до *VaR* не потрібно змінювати структуру портфеля фінансових активів, вибрану на основі максимізації відношення Шарпа. Цей факт, очевидно, важливий для використання на практиці. З другого боку, як показано в [10], для ваг портфеля із найбільшим відношенням Шарпа неможливо побудувати незміщену оцінку та, крім цього, невідомо, чи існує принаймні асимптотична незміщена оцінка для ваг таким чином побудованого портфеля. Цей результат викликає серйозні сумніви щодо можливості використання окресленого методу при виборі раціональної структури портфеля. Проте, як наголошено вище, з допомогою мінімізації *VaR* за різних рівнів довіри можна отримати будь-який портфель із ефективної множини Марковіца. Іншими словами, існує такий рівень довіри α_{SR}, за якого структура портфеля із найменшим рівнем *VaR* та портфеля із найбільшим відношенням Шарпа співпадатиме.

Теорема 1. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо $\boldsymbol{X_t}$ – k-вимірний вектор дохідностей у момент часу t. Припустимо, що $\boldsymbol{X_t} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ і всі елементи вектора μ не є однаковими. Тоді за рівня довіри

$$\alpha_{SR} = \Phi\left(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\right), \quad (3)$$

де $\Phi(\cdot)$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу, розв'язки задачі максимізації відношення Шарпа та задачі мінімізації *VaR* портфеля співпадають.

Доведення. Розглянемо дві можливі оптимізаційні задачі для вибору раціональної структури портфеля:

1) максимізація відношення Шарпа

$$R_{\mathbf{w}} / \sqrt{V_{\mathbf{w}}} \to \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1;$$

2) мінімізація *VaR* портфеля за рівня довіри α

$$z_\alpha \sqrt{V_{\mathbf{w}}} - R_{\mathbf{w}} \to \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Нагадаємо, що очікувана дохідність портфеля становить $R_{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$, а дисперсія – $V_{\mathbf{w}} = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Враховуючи це, розв'язки попередніх задач оптимізації можна записати у такому вигляді [11]:

$$\mathbf{w}_{VaR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{w}_{SR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}.$$

При цьому дисперсія портфелів обчислюється таким чином:

$$V_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{\left(z_\alpha^2 - s\right) \cdot \mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}, \quad V_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\left(\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}.$$

Прирівнюючи попередні вирази та розв'язуючи отримане рівняння відносно α, можна довести правильність теореми 1.

Використання результату теореми 1 дає змогу побудувати портфель із максимальним відношенням Шарпа, мінімізуючи *VaR* портфеля.

Утім, отримані результати не можуть бути застосовані на практиці, оскільки параметри розподілу вектора дохідностей μ і Σ зазвичай є невідомими. Тому для практичного використання отриманих результатів ці параметри необхідно певним чином оцінити. Існують різні методи оцінки, серед яких найвідоміший – історичний. На основі спостережень поведінки випадкової величини в минулому, ми можемо оцінити її параметри. Приспустімо, що нам відома вибірка попередніх значень векторів дохідностей фінансових активів $X_1, X_2, \ldots X_n$. Тоді на її базі визначимо так звані вибіркові оцінки невідомих параметрів:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \quad (4)$$

Підставляючи оцінки (4) у вираз (3), отримаємо оцінку для рівня довіри α_{SR}, яку позначимо $\hat{\alpha}_{SR}$. Зауважимо, що вибіркові оцінки (4) є в загальному випадку випадковими величинами. Отже, $\hat{\alpha}_{SR}$ – це також випадкова величина. Дослідимо ймовірнісні властивості цієї оцінки, а саме, її точність. Для цього припустимо спочатку, що значення параметрів розподілу є відомими і обчислимо точне значення для рівня довіри α_{SR}. На наступному кроці припустимо, що вектор дохідностей нормально розподілений із вибраними параметрами та на основі згенерованої вибірки оцінимо значення $\hat{\alpha}_{SR}$. Повторимо цей алгоритм, наприклад, 100 000 разів і дослідимо розподіл значень $\hat{\alpha}_{SR}$ відносно точного значення. Значення невідомих параметрів μ та Σ виберемо на основі п'яти щомісячних MSCI курсів (Germany, USA, Japan, UK, Switzerland) за період часу від 11.2008 до 10.2013, а саме

$\boldsymbol{\mu}$=(0.96325, 1.16444, 0.55278, 0.83877, 1.09371)',

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 64.3866 & 32.1398 & 25.7951 & 38.2751 & 38.1137 \\ 32.1398 & 20.7210 & 14.5081 & 22.0218 & 20.5128 \\ 25.7951 & 14.5081 & 22.8372 & 17.8492 & 19.3643 \\ 38.2751 & 22.0218 & 17.8492 & 30.6135 & 25.9741 \\ 38.1137 & 20.5128 & 19.3643 & 25.9741 & 30.9804 \end{pmatrix}.$$

На основі цих параметрів отримаємо, що значення рівня довіри, за якого структури портфелів із максимальним відношенням Шарпа і найменшим рівнем *VaR* співпадають, становить α_{SR} =0.646616.

На рис. зображено розподіл значень оцінки $\hat{\alpha}_{SR}$ залежно від обсягу вибірок, на основі яких проведено оцінювання. Зазначимо, що навіть за невеликого обсягу вибірки (n=60, n=120) значення оцінок рівня довіри знаходяться в доволі вузькому інтервалі. Із зростанням обсягів вибірок значення ще більше ущільнюються.

Середні значення та дисперсії (табл.), отримані на основі вибірок, підтверджують попередні спостереження, що вибіркові оцінки для рівня довіри α_{SR} є доволі точними.

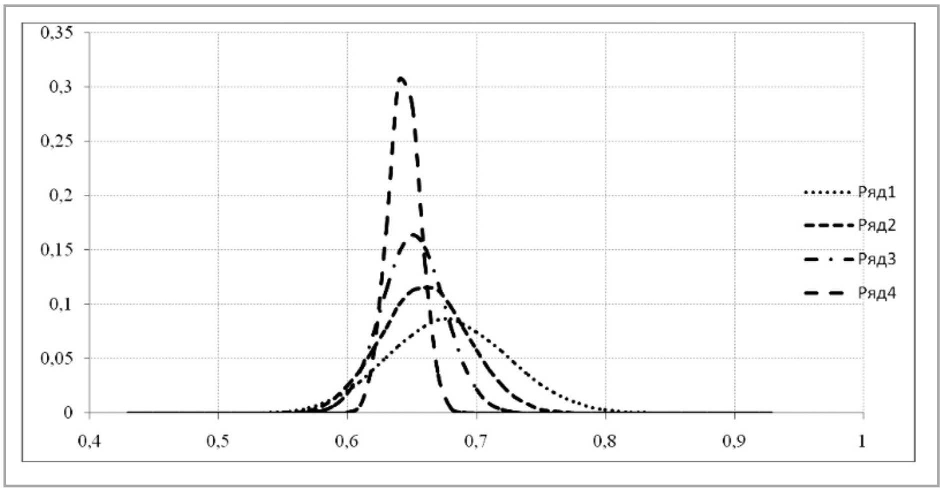

Рис. **Розподіл значень $\hat{\alpha}_{SR}$**
Джерело: Авторська розробка

Висновки. У роботі розглянуто можливість побудови портфеля фінансових активів із максимальним відношенням Шарпа на основі критерію мінімізації *VaR*. Зважаючи на поширення відношення Шарпа як показника якості портфеля, проведено аналіз впливу вибору міри ризику на структуру портфеля, побудованого на основі критерію максимізації відношення Шарпа. Доведено, що за класичних припущень щодо поведінки дохідності перехід від дисперсії до *VaR* при вимірюванні ризику не впливає на структуру портфеля із максимальним відношенням Шарпа. Зрозуміло, що отриманий результат є підтвердженням важливості цього інструменту в теорії портфеля. Водночас виникло питання про місце портфеля із максимальним відношенням Шарпа у множині портфелів із найменшим рівнем *VaR*.

Таблиця

Середні значення та дисперсії $\hat{\alpha}_{SR}$

Обсяг вибірки *n*	Середнє	Дисперсія
60	0.68365	0.0021081
120	0.66539	0.0011388
240	0.65606	0.00059087
1000	0.64892	0.00014682

Джерело: Авторська розробка

Як зазначається в [7], змінюючи рівень довіри від найменшого можливого значення до 1, можна отримати ефективну, за Марковіцем, множину портфелів, одним із яких є портфель із максимальним відношенням Шарпа. Отже, за певного рівня довіри цей портфель є портфелем із найменшим рівнем *VaR*. У статті представлено аналітичний вираз для обчислення рівня довіри α_{SR}, який залежить лише від параметрів розподілу вектора дохідностей, тобто від об'єктивних показників. Зауважимо, що значення цих параметрів на практиці є невідомими, а тому у своїх розрахунках ми змушені використовувати оцінки цих значень, які в загальному випадку є випадковими величинами. Отже, виникає необхідність дослідити ймовірнісні властивості побудованої оцінки рівня довіри α_{SR}. На прикладі п'яти щомісячних MSCI курсів (Germany, USA, Japan, UK, Switzerland) за період часу від 11.2008 до 10.2013 показано, що точність вибіркової оцінки для параметра α_{SR} є задовільною навіть за невеликого обсягу вибірки (n=60) та доволі швидко зростає у разі збільшення обсягу вибірки. Крім того, враховуючи отримані середні значення і дисперсії оцінки рівня довіри α_{SR}, ми дійшли висновку, що задачу максимізації відношення Шарпа на практиці можна замінити задачею мінімізації *VaR*, яка є більш універсальним методом побудови портфеля фінансових активів.

Література

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – No 7. – P. 77–91.
2. Merton R. C. An analytical derivation of the efficient frontier / R. C. Merton // Journal of financial and quantitative analysis. – 1972. – No 7. – P. 1851–1872.
3. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – No 134. – P. 235–256.
4. Sharpe W. F. The Sharpe ratio / W. F. Sharpe // The journal of portfolio management. – 1994. – Vol. 21. – No 1. – P. 49–58.
5. Lo A. W. The statistics of Sharpe ratio / A. W. Lo // Financial analysts journal. – 2002. – No 58. – P. 36–52.
6. Operational risk consultative document, supporting document to the New Basel Capital Accord [Electronic recourse] / Basel Committee on Banking Supervision. – January 2001. – 30 p. – Accessed mode : http://www.bis.org/publ/bcbsca02.pdf
7. Alexander G. J. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Journal of economic dynamics & control. – 2002. – No 26. – P. 1159–1193.
8. Duffie D. An overview of Value-at-Risk / D. Duffie, J. Pan // Journal of derivatives. – 1997. – Vol. 4. – No 3. – P. 7–49.
9. Jorion P. Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk / P. Jorion. – New York: McGraw-Hill Professional, 2002. – 544 p.
10. Schmid W. On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio / W. Schmid, T. Zabolotskyy // ASTA – Advances in Statistical Analysis. – 2008. – No 92. – P. 29–34.
11. Bodnar T. Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Statistics & Risk Modeling. – 2012. – No 29. – P. 281–314.

Стаття надійшла до редакції 25.10.2013

References

1. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance, 7,* 77-91.
2. Merton, R. C. (1972). An analytical derivation of the efficient frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7,* 1851-1872.
3. Okhrin, Y., & Schmid, W. (2006). Distributional properties of optimal portfolio weights. *Journal of Econometrics, 134,* 235-256.
4. Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe ratio. *The Journal of Portfolio Management, 21*(1), 49-58.
5. Lo, A. W. (2002). The statistics of Sharpe ratio. *Financial Analysts Journal, 58,* 36-52.
6. Basel Committee on Banking Supervision (2001, January). *Operational risk consultative document, supporting document to the New Basel Capital Accord.* Retrieved from http://www.bis.org/publ/bcbsca02.pdf
7. Alexander, G. J., & Baptista, M. A. (2002). Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis. *Journal of Economic Dynamics & Control, 26,* 1159-1193.
8. Duffie, D., & Pan, J. (1997). An overview of Value-at-Risk. *Journal of Derivatives, 4*(3), 7-49.
9. Jorion, P. (2002). *Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk.* New York: McGraw-Hill Professional.
10. Schmid, W., & Zabolotskyy, T. (2008). On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio. *ASTA – Advances in Statistical Analysis, 92,* 29-34.
11. Bodnar, T., Schmid, W., & Zabolotskyy, T. (2012). Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests. *Statistics & Risk Modeling, 29,* 281-314.

Received 25.10.2013